

7.1

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktion suurin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

Määritetään laskimen Max-komennolla kohta, jossa funktion f arvo on suurin.

Laskimen komento on

$\text{Max}(f, -\infty, \infty)$ tai
 $f\text{Max}(f(x), x, -\infty, \infty)$

Laskin antaa tulokseksi $(\frac{3}{2}, \frac{25}{4})$ tai $x = \frac{3}{2}$.

Esimerkiksi GeoGebralla:

$$\begin{aligned} &\text{Max}(-x^2 + 3x + 4, -\infty, \infty) \\ \rightarrow &\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right) \end{aligned}$$

Jos laskin antaa tulokseksi vain $x = \frac{3}{2}$, lasketaan funktion arvo kohdassa $\frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$$

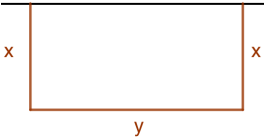
Funktion f suurin arvo on $\frac{25}{4} = 6,25$.

Vastaus

suurin arvo 6,25

7.2

Merkitään seinää vastaan kohtisuoran sivun pituutta metreinä kirjaimella x ja seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 12 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 & | -2x \\ y &= 12 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= xy && \text{Sijoitetaan } y = 12 - 2x. \\ &= x(12 - 2x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -2x^2 + 12x \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y &\geq 0 \\ 12 - 2x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 6$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -2x^2 + 12x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 6$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 6)$ tai

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 6)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 3$.

Laskin antaa tulokseksi

$(3, 18)$ tai $x = 3$

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 3$. Siis aitauksen pinta-ala on suurin, kun seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on 3 m. Lasketaan toisen sivun pituus.

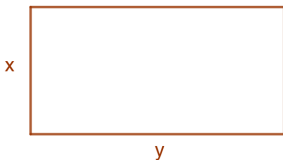
$$y = 12 - 2x = 12 - 6 = 6 \text{ (m)}$$

Vastaus

seinäävastaan kohtisuorat sivut 3 m, seinän suuntainen sivu 6 m

7.3

Merkitään toisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x ja toisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 60 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$2x + 2y = 60 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 30 - x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$= x(30 - x)$$

$$= -x^2 + 30x$$

$$\text{Sijoitetaan } y = 30 - x.$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$30 - x \geq 0$$

$$x \leq 30$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 30$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -x^2 + 30x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 30$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 30) tai
fMax(A(x), x, 0, 30)

Laskin antaa kohdaksi $x = 15$.

Laskin antaa tulokseksi
(15, 225) tai $x = 15$

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 15$. Siis alueen pinta-ala on suurin, kun toisen sivun pituus on 15 m. Lasketaan toisen sivun pituus ja alueen pinta-ala.

$$y = 30 - x = 30 - 15 = 15 \text{ (m)}$$

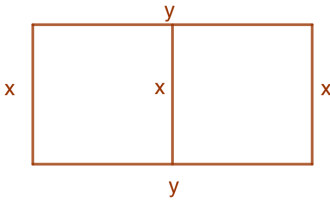
$$A(15) = 225 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

kaikki sivut 15 m, pinta-ala 225 m²

7.4

Merkitään toisen sivun ja sivun suuntaisen aidan pituutta metreinä kirjaimella x ja toisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 150 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$3x + 2y = 150 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 75 - \frac{3}{2}x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$\text{Sijoitetaan } y = 75 - \frac{3}{2}x.$$

$$= x(75 - \frac{3}{2}x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 75x$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$75 - \frac{3}{2}x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 50$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 50$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 75x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 50$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella
 $\text{Max}(A, 0, 50)$ tai
 $\text{fMax}(A(x), x, 0, 50)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 25$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(25, 937,5)$ tai $x = 25$.

Funktion A suurin arvo on $A(25) = 937,5 \approx 940$.

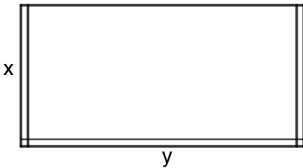
Aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala on 940 m^2 .

Vastaus

940 m^2

7.5

Merkitään vastakkaisten kaksinkertaisten sivujen pituutta senttimetreinä kirjaimella x ja yhden kaksinkertaisen sivun ja vastakkaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Sivujen pituuksien summan tulee olla 180 senttimetriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$4x + 3y = 180 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 60 - \frac{4}{3}x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee kehikon pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$\text{Sijoitetaan } y = 60 - \frac{4}{3}x.$$

$$= x(60 - \frac{4}{3}x)$$

$$\text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + 60x$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$60 - \frac{4}{3}x \geq 0$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \leq 45$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 45$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 60x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 45$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella
 $\text{Max}(A, 0, 45)$ tai
 $\text{fMax}(A(x), x, 0, 45)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 22,5$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(22,5; 675)$ tai $x = 22,5$.

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 22,5$. Siis kehikon pinta-ala on suurin, kun vastakkaisten kaksinkertaisten sivujen pituus on 22,5 cm. Lasketaan toisen sivun pituus.

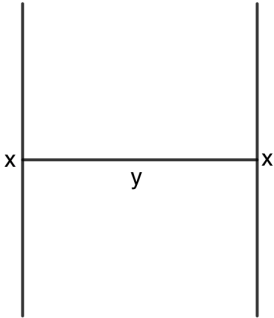
$$y = 60 - \frac{4}{3}x = 60 - \frac{4}{3} \cdot 22,5 = 30 \text{ (cm)}$$

Vastaus

vastakkaisen kaksinkertaiset sivut 22,5 cm, kaksi muuta sivua 30 cm

7.6

Merkitään keuhkon pystytukien pituutta metreinä kirjaimella x ja vaakasukien kirjaimella y .



Tukien pituuksien summan tulee olla 2,80 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$2x + y = 2,80 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 2,80 - 2x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tekstiilin pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$= x(2,80 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 2,80x$$

Sijoitetaan $y = 2,80 - 2x$.

Sievennetään CAS-laskimella.

Tukien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$2,80 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 1,40$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 1,40$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -2x^2 + 2,80x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 1,40$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 1.40)$ tai

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 1.40)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 0,70$.

Laskin antaa tulokseksi

$(0,70; 0,98)$ tai $x = 0,70$.

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 0,70$. Siis tekstiilin pinta-ala on suurin, kun kehikon pystytukien pituus on $0,70$ m. Lasketaan vaakatuken pituus.

$$y = 2,80 - 2x = 2,80 - 2 \cdot 0,70 = 1,40 \text{ (m)}$$

Vastaus

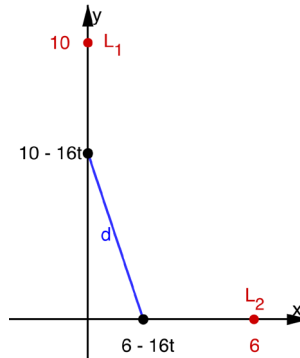
vaakatuki $1,40$ m, pystytuet $0,70$ m

7.7

Sijoitetaan tilanne koordinaatistoon, jonka yksikkönä on kilometri. Toisen laivan reitti on y -akselilla ja toisen laivan x -akselilla.

Laiva L_1 on y -akselin pisteessä $(0, 10)$ ja laiva L_2 x -akselin pisteessä $(6, 0)$. Kumpikin kulkee kohti origoa.

Kun aikaa on kulunut t tuntia, laiva L_1 on kulkenut $16t$ kilometriä ja on pisteessä $(0, 10 - 16t)$. Laiva L_2 on kulkenut $16t$ kilometriä ja on pisteessä $(6 - 16t, 0)$.



Laivojen välinen etäisyys d toteuttaa Pythagoraan lauseen.

$$d^2 = (10 - 16t)^2 + (6 - 16t)^2$$

Etäisyys d on pienin silloin, kun d^2 on pienin. Tutkittavaksi funktioksi voidaan valita d^2 .

$$\begin{aligned} f(t) &= (10 - 16t)^2 + (6 - 16t)^2 \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= 512t^2 - 512t + 136 \end{aligned}$$

Ajan on oltava vähintään nolla tuntia: $t \geq 0$.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $t \geq 0$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(t) = 512t^2 - 512t + 136$.

Määritetään laskimen Min-komennolla väliltä $t \geq 0$ kohta, jossa funktion f arvo on pienin.

Laskimella

$\text{Min}(f, 0, \infty)$ tai

$\text{fMin}(f(t), t, 0, \infty)$

Laskin antaa kohdaksi $t = \frac{1}{2}$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(\frac{1}{2}, 8)$ tai $t = \frac{1}{2}$.

Laivojen välinen etäisyys on pienimmillään, kun aikaa on kulunut puoli tuntia.

Lasketaan laivojen välinen etäisyys ajanhetkellä $t = \frac{1}{2}$.

$$d = \sqrt{f(\frac{1}{2})} = \sqrt{8} \approx 2,8 \text{ (km)}$$

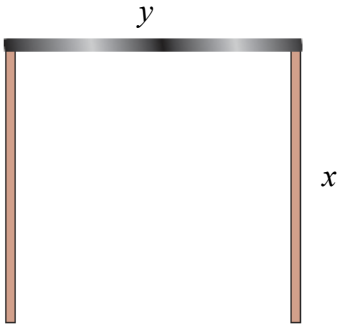
Etäisyys on pienimmillään 2,8 km.

Vastaus

puolen tunnin kuluttua, etäisyys 2,8 km

7.8

Merkitään keuhikon pystytukien pituutta metreinä kirjaimella x ja vaakatuella kirjaimella y .



Pystytukien hinta euroina on $2x \cdot 20 = 40x$ ja vaakatuella $y \cdot 50 = 50y$.

Hintojen summan tulee olla 200 euroa. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$40x + 50y = 200 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 4 - \frac{4}{5}x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee oviaukon pinta-alan.

$$A(x) = xy \quad \text{Sijoitetaan } y = 4 - \frac{4}{5}x.$$

$$= x\left(4 - \frac{4}{5}x\right) \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

$$= -\frac{4}{5}x^2 + 4x$$

Tukien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$4 - \frac{4}{5}x \geq 0$$

$$x \leq 5$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 5$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 4x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 5$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 5) tai

fMax(A(x), x, 0, 5)

Laskin antaa kohdaksi $x = 2,5$.

Laskin antaa tulokseksi

(2,5; 5) tai $x = 2,5$.

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 2,5$. Siis oviaukon pinta-ala on suurin, kun kehikon pystytukien pituus on 2,5 m. Lasketaan vaakatuken pituus.

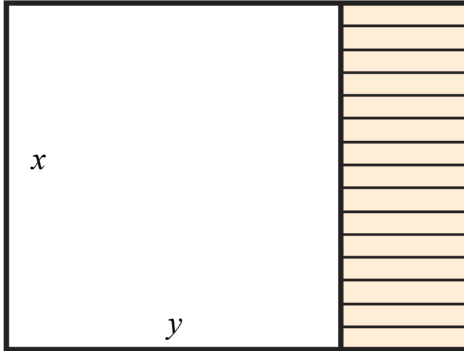
$$y = 4 - \frac{4}{5}x = 4 - \frac{4}{5} \cdot 2,5 = 2,0 \text{ (m)}$$

Vastaus

vaakatuki 2,0 m, pystytuet 2,5 m

7.9

Merkitään ikkuna-aukon valoa läpäisevän osan korkeutta senttimetreinä kirjaimella x ja leveyttä kirjaimella y .



Koko ikkuna-aukon leveys senttimetreinä on $y + 30$.

Ikkuna-aukon ympärysmitta tulee olla 360 cm. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$2x + 2 \cdot (y + 30) = 360 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$y = 150 - x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee valoa läpäisevän osan pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= xy && \text{Sijoitetaan } y = 150 - x. \\ &= x(150 - x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -x^2 + 150x \end{aligned}$$

Pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y &\geq 0 \\ 150 - x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\leq 150 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 150$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -x^2 + 150x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 150$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 150)$ tai

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 150)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 75$.

Laskin antaa tulokseksi $(75, 5625)$ tai $x = 75$.

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 75$. Siis ikkuna-aukon valoa läpäisevän osan pinta-ala on suurin, kun ikkuna-aukon korkeus on 75 cm. Lasketaan valoa läpäisevän osan leveys.

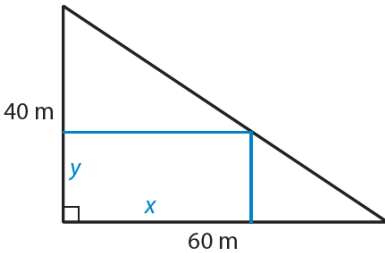
$$y = 150 - x = 150 - 75 = 75 \text{ (cm)}$$

Koko ikkuna-aukon leveys on $y + 30 = 75 + 30 = 150$ (cm).

Vastaus

korkeus 75 cm, leveys 150 cm

7.10



Iso kolmio (pelto) ja pellon oikeaan alakulmaan muodostuva kolmio, jonka kateettien pituudet ovat $60 - x$ ja y , ovat yhdenmuotoiset. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\frac{40}{60} = \frac{y}{x - 60} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y = 40 - \frac{2}{3}x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tontin pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$\text{Sijoitetaan } y = 40 - \frac{2}{3}x.$$

$$= x(40 - \frac{2}{3}x)$$

$$\text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 + 40x$$

Pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$40 - \frac{2}{3}x \geq 0$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \leq 60$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 60$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 40x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 60$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella
 $\text{Max}(A, 0, 60)$ tai
 $\text{fMax}(A(x), x, 0, 60)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 30$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(30, 600)$ tai $x = 30$.

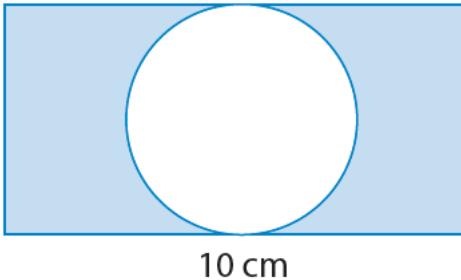
Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 30$. Siis tontin pinta-ala on suurin, kun sivun pituus x on 30 m. Lasketaan sivun pituus y .

$$y = 40 - \frac{2}{3}x = 40 - \frac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ (m)}$$

Vastaus

$x = 30$ m ja $y = 20$ m

7.11



Merkitään suorakulmaisen paperiarkin korkeutta senttimetreinä lausekkeella $2x$.

Poisleikattavan ympyrän säde on tällöin $\frac{2x}{2} = x$ ja pinta-ala $\pi \cdot x^2$.

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee jäljelle jäävän paperin pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= \underbrace{10 \cdot 2x}_{\text{paperiarkki}} - \underbrace{\pi x^2}_{\text{ympyrä}} \\ &= -\pi x^2 + 20x \end{aligned}$$

Arkin korkeuden on oltava epänegatiivinen. Lisäksi tiedetään, että arkin korkeus on enintään 10 cm.

$$\begin{aligned} 2x &\geq 0 \quad \text{ja} \quad 2x \leq 10 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\geq 0 \quad \quad \quad x \leq 5 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 5$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -\pi x^2 + 20x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 5$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 5)$ tai

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 5)$

Laskin antaa kohdaksi $x = \frac{10}{\pi}$.

Laskin antaa tulokseksi

$(\frac{10}{\pi}, \frac{100}{\pi})$ tai $x = \frac{10}{\pi}$.

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{10}{\pi}$. Siis jäljelle jäävän paperin pinta-ala on suurin, kun paperiarkin korkeus on

$$2x = 2 \cdot \frac{10}{\pi} \approx 6,4 \text{ (cm)}.$$

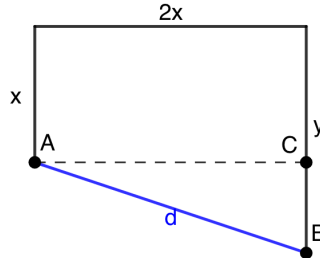
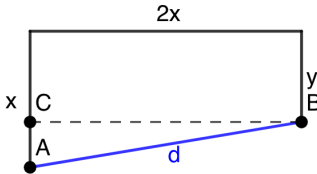
Vastaus

6,4 cm

7.12

Merkitään reitin lähtöpistettä A ja loppupistettä B . Merkitään viimeiseksi kuljetun matkan pituutta kirjaimella y .

Reitti on jommankumman kuvion mukainen.



Koska koko kävelymatkan pituus on 100 m, niin viimeiseksi kuljetun matkan pituus $y = 100 - 3x$.

Lähtöpisteen ja loppupisteen välinen etäisyys d on hypotenuusa kolmiossa ABC , jossa toisen kateetin pituus on $2x$ ja toisen

$$x - y = x - (100 - 3x) = 4x - 100$$

tai

$$y - x = (100 - 3x) - x = 100 - 4x.$$

Etäisyys d toteuttaa Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned} d^2 &= (2x)^2 + (4x - 100)^2 & \text{tai} & \quad d^2 = (2x)^2 + (100 - 4x)^2 \\ &= 20x^2 - 800x + 10\,000 & & \quad = 20x^2 - 800x + 10\,000 \end{aligned}$$

Siis etäisyyden neliö $d^2 = 20x^2 - 800x + 10\,000$.

Etäisyys d on pienin silloin, kun d^2 on pienin. Tutkittavaksi funktioksi voidaan valita d^2 .

$$f(x) = 20x^2 - 800x + 10\,000$$

Kuljettujen matkojen on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion f määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$100 - 3x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq \frac{100}{3}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = 20x^2 - 800x + 10\,000$.

Määritetään laskimen Min-komennolla

Laskimella

väliltä $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$ kohta, jossa

$\text{Min}(f, 0, \frac{100}{3})$ tai

funktion f arvo on pienin.

$f\text{Min}(f(x), x, 0, \frac{100}{3})$

Laskin antaa kohdaksi $x = 20$.

Laskin antaa tulokseksi
(20, 2000) tai $x = 20$.

Etäisyys d on pienin, kun $x = 20$ m.

Vastaus

$x = 20$ m

7.13

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktion suurin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = -0,25x^2 + 4x + 3$.

Määritetään laskimen Max-komennolla kohta, jossa funktion f arvo on suurin.

Laskimen komento on

$\text{Max}(f, -\infty, \infty)$ tai
 $f\text{Max}(f(x), x, -\infty, \infty)$

Laskin antaa tulokseksi $(8, 19)$ tai $x = 8$.

Esimerkiksi GeoGebralla:

$$\text{Max}(-0.25 x^2 + 4 x + 3, -\infty, \infty)$$
$$\rightarrow (8, 19)$$

Jos laskin antaa tulokseksi vain $x = 8$, lasketaan funktion arvo kohdassa 8.

$$f(8) = 19$$

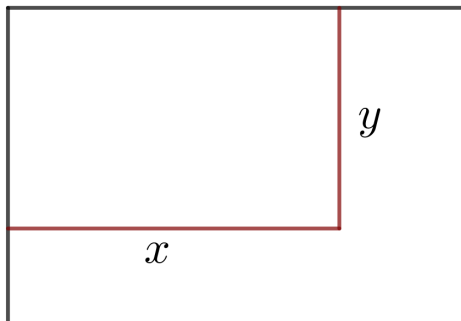
Funktion f suurin arvo on 19.

Vastaus

suurin arvo 19

7.14

Merkitään aitauksen toisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x ja toisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 6 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\begin{aligned}x + y &= 6 & | -x \\y &= 6 - x\end{aligned}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$\begin{aligned}A(x) &= xy \\&= x(6 - x) \\&= -x^2 + 6x\end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 6 - x$.

Sievennetään CAS-laskimella.

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned}x &\geq 0 & \text{ja} & & y &\geq 0 \\& & & & 6 - x &\geq 0 \\& & & & x &\leq 6\end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 6$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -x^2 + 6x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 6$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 6) tai

fMax(A(x), x, 0, 6)

Laskin antaa kohdaksi $x = 3$.

Laskin antaa tulokseksi

(3, 9) tai $x = 3$

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 3$. Siis aitauksen pinta-ala on suurin, kun toisen sivun pituus on 3 m. Lasketaan toisen sivun pituus,

$$y = 6 - x = 6 - 3 = 3 \text{ (m)}$$

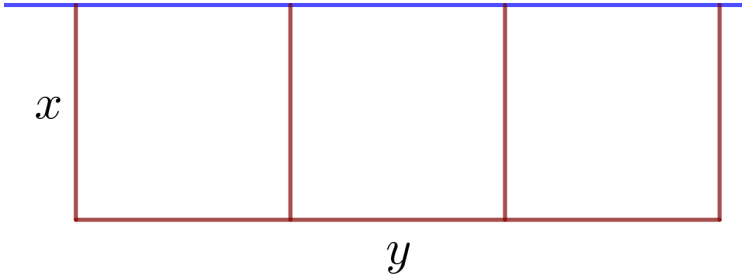
Aitauksen pinta-ala on suurin, kun kummankin sivun pituus on 3 metriä.

Vastaus

molemmat sivut 3 m

7.15

Merkitään rantaviivaa vastaan kohtisuoran sivun pituutta metreinä kirjaimella x ja rannan suuntaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 120 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\begin{aligned} 4x + y &= 120 & | -4x \\ y &= 120 - 4x \end{aligned}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= xy & \text{Sijoitetaan } y = 120 - 4x. \\ &= x(120 - 4x) & \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -4x^2 + 120x \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & \text{ja} & & y &\geq 0 \\ &120 - 4x &\geq 0 & & & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ &x &\leq 30 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 30$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -4x^2 + 120x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 30$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 30) tai

fMax(A(x), x, 0, 30)

Laskin antaa kohdaksi $x = 15$.

Laskin antaa tulokseksi
(15, 900) tai $x = 15$.

Funktion A suurin arvo on $A(15) = 900$.

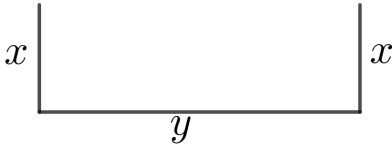
Aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala on 900 m^2 .

Vastaus

900 m^2

7.16

Merkitään taitoksen leveyttä eli kourun seinämän korkeutta senttimetreinä kirjaimella x ja kourun pohjan leveyttä kirjaimella y .



Peltilevyn leveys on 80 cm, joten sivujen pituuksien summan tulee olla 80 cm. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 80 & | -2x \\ y &= 80 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee poikkileikkauksen pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= xy && \text{Sijoitetaan } y = 80 - 2x. \\ &= x(80 - 2x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -2x^2 + 80x \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y &\geq 0 \\ 80 - 2x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\leq 40 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 40$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -2x^2 + 80x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 40$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 40)$ tai
 $\text{fMax}(A(x), x, 0, 40)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 20$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(20, 800)$ tai $x = 20$.

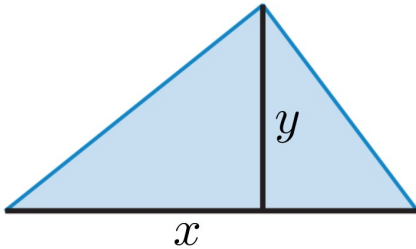
Funktion A arvo on suurin, kun taitoksen leveys on 20 senttimetriä.

Vastaus

20 cm

7.17

Merkitään kolmion kannan pituutta metreinä kirjaimella x ja kolmion korkeutta kirjaimella y .



Vaakatuki maksaa $25x$ euroa ja pystytuki $40y$ euroa. Yhteensä tuet maksavat 100 euroa. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$25x + 40y = 100$$

Ratkaistaan muuttuja y
CAS-laskimella.

$$y = 2,5 - 0,625x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee kolmion pinta-alan.

$$A(x) = \frac{1}{2}xy$$

Sijoitetaan $y = 2,5 - 0,625x$.

$$= \frac{1}{2}x(2,5 - 0,625x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -0,3125x^2 + 1,25x$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y &\geq 0 \\ 2,5 - 0,625x &\geq 0 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 4$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -0,3125x^2 + 1,25x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 4$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 4) tai

fMax(A(x), x, 0, 4)

Laskin antaa kohdaksi $x = 2$.

Laskin antaa tulokseksi
(20, 1,25) tai $x = 2$.

Funktion A arvo on suurin, kun vaakatuenn pituus $x = 2$ m.

Lasketaan pystytuen pituus.

$$y = 2,5 - 0,625x = 2,5 - 0,625 \cdot 2 = 1,25 \text{ (m)}$$

Vaakatuen pituus on siis 2,00 m ja pystytuen 1,25 m.

Vastaus

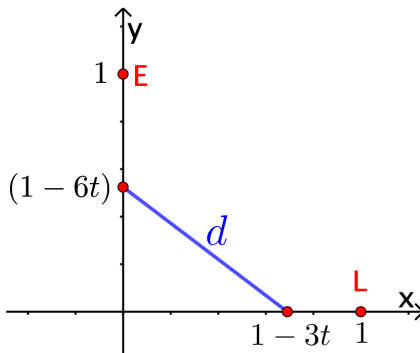
vaakatuki 2,00 m, pystytuki 1,25 m

7.18

Sijoitetaan tilanne koordinaatistoon, jonka yksikkönä on kilometri. Lapsen kulkema polku on x -akselilla ja etsijän kulkema polku y -akselilla. Risteys on origossa.

Lapsi on x -akselin pisteessä $(1, 0)$ ja etsijä y -akselin pisteessä $(0, 1)$. Kumpikin kulkee kohti origoa.

Kun aikaa on kulunut t tuntia, lapsi on kulkenut $3t$ kilometriä ja on pisteessä $(1 - 3t, 0)$. Etsijä on kulkenut $6t$ kilometriä on pisteessä $(0, 1 - 6t)$.



Ihmisten välinen etäisyys d toteuttaa Pythagoraan lauseen.

$$d^2 = (1 - 6t)^2 + (1 - 3t)^2$$

Etäisyys d on pienin silloin, kun d^2 on pienin. Tutkittavaksi funktioksi voidaan valita d^2 .

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - 6t)^2 + (1 - 3t)^2 && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= 45t^2 - 18t + 2 \end{aligned}$$

Ajan on oltava vähintään nolla tuntia: $t \geq 0$.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $t \geq 0$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(t) = 45t^2 - 18t + 2$.

Määritetään laskimen Min-komennolla väliltä $t \geq 0$ kohta, jossa funktion f arvo on pienin.

Laskimella

$\text{Min}(f, 0, \infty)$ tai
 $\text{fMin}(f(t), t, 0, \infty)$

Laskin antaa kohdaksi $t = \frac{1}{5}$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ tai $t = \frac{1}{5}$.

Ihmisten välinen etäisyys on pienimmillään, kun aikaa on kulunut

$$\frac{1}{5} \text{ h} = \frac{1}{5} \cdot 60 \text{ min} = 12 \text{ min.}$$

Lasketaan ihmisten välinen etäisyys ajanhetkellä $t = \frac{1}{5}$.

$$d = \sqrt{f\left(\frac{1}{5}\right)} = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,45 \text{ (km)}$$

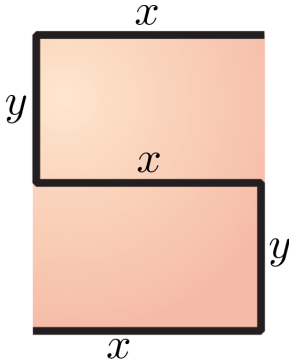
Etäisyys on pienimmillään $0,45 \text{ km} = 450 \text{ m}$. Lapsi ei siis kuule etsijän huhuilua.

Vastaus

12 minuutin kuluttua, ei kuule

7.19

Merkitään vaakasuuntaisen tuen pituutta metreinä kirjaimella x ja pystysuuntaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Putken yhteispituus on 4,80 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$3x + 2y = 4,80$$

Ratkaistaan y CAS-laskimella.

$$y = 2,4 - 1,5x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee mainoksen pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot 2y$$

Sijoitetaan $y = 2,4 - 1,5x$.

$$= x \cdot 2(2,4 - 1,5x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -3x^2 + 4,8x$$

Putkien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$2,4 - 1,5x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 1,6$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 1,6$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -3x^2 + 4,8x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 1,6$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 1.6)$ tai

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 1.6)$

Laskin antaa kohdaksi $x = \frac{4}{5}$.

Laskin antaa tulokseksi

$(\frac{4}{5}, \frac{48}{25})$ tai $x = \frac{4}{5}$.

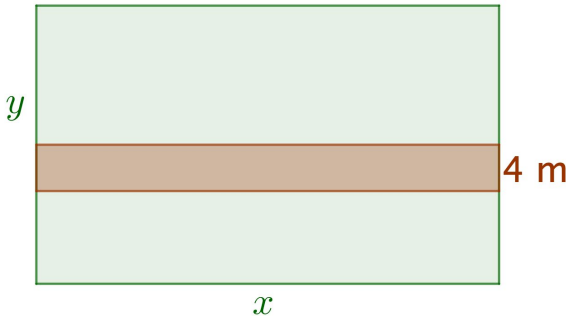
Mainoksen suurin mahdollinen pinta-ala on $A(\frac{4}{5}) = \frac{48}{25} = 1,92 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vastaus

1,92 m²

7.20

Merkitään kentän sivujen pituuksia metreinä kirjaimilla x ja y .



Kentän ympärysmitta on 60 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$2x + 2y = 60$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 30 - x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee nurmialueen pinta-alan.

$$A(x) = xy - 4x$$

Sijoitetaan $y = 30 - x$.

$$= x \cdot (30 - x) - 4x$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -x^2 + 26x$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$30 - x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 30$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 30$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -x^2 + 26x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 30$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Max}(A, 0, 30)$ tai
 $\text{fMax}(A(x), x, 0, 30)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 13$.

Laskin antaa tulokseksi
 $(13, 169)$ tai $x = 13$.

Nurmialueen pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun käytävän suuntaisen sivun pituus $x = 13$ m. Lasketaan toisen sivun pituus.

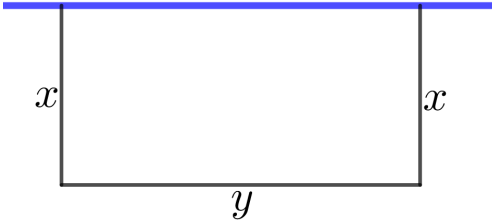
$$y = 30 - x = 30 - 13 = 17 \text{ (m)}.$$

Vastaus

käytävän suuntaiset sivut 13 m, toiset sivut 17 m

7.21

Merkitään rantaviivaa vastaan kohtisuoran sivun pituutta metreinä kirjaimella x ja rantaviivan suuntaisen sivun pituutta kirjaimella y .



Aitauksen sivujen pituuksien summan tulee olla 160 metriä. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 160 & | -2x \\ y &= 160 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tontin hinnan.

$$\begin{aligned} h(x) &= \underbrace{xy}_{\text{pinta-ala}} \cdot 12 + \underbrace{y}_{\text{ranta-viiva}} \cdot 300 && \text{Sijoitetaan } y = 160 - 2x. \\ &= x \cdot (160 - 2x) \cdot 12 + (160 - 2x) \cdot 300 && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -24x^2 + 1320x + 48\,000 \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion h määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y &\geq 0 \\ 160 - 2x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\leq 80 \end{aligned}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio h saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 80$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $h(x) = -24x^2 + 1320x + 48\,000$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 80$ kohta, jossa funktion h arvo on suurin.

Laskimella
Max(h, 0, 80) tai
fMax(h(x), x, 0, 80)

Laskin antaa kohdaksi $x = 27,5$.

Laskin antaa tulokseksi
(27,5, 66 150) tai $x = 27,5$.

Tontti on mahdollisimman kallis, kun rantaa vastaan kohtisuoran sivun pituus $x = 27,5$ m. Lasketaan rannan suuntaisen sivun pituus.

$$y = 160 - 2x = 160 - 2 \cdot 27,5 = 105 \text{ (m)}$$

Tontin suurin mahdollinen hinta on $h(27,5) = 66\,150$ (€).

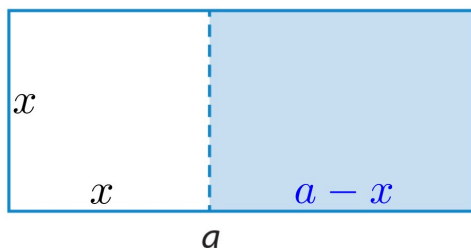
Tontti on mahdollisimman kallis, kun rannan suuntaisen sivun pituus on 105 metriä ja rantaa vastaan kohtisuoran sivun pituus 27,5 m. Tontin hinta on tällöin 66 150 euroa.

Vastaus

rantaa vastaan kohtisuorat sivut 27,5 m,
rannan suuntainen sivu 105m,
tontin hinta 66 150 €

7.22

Merkitään arkin korkeutta kirjaimella x . Tällöin myös poisleikattavan neliön sivun pituus on x . Jäljelle jäävän paperipalan leveys on $a - x$.



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee jäljelle jäävän paperipalan pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= (a - x) \cdot x \\ &= ax - x^2 \end{aligned}$$

Funktion $A(x) = ax - x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti. Huipun x -koordinaatti on derivaattafunktion nollakohta.

Määritetään derivaattafunktio.

$$A'(x) = a - 2x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$a - 2x = 0$$

Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

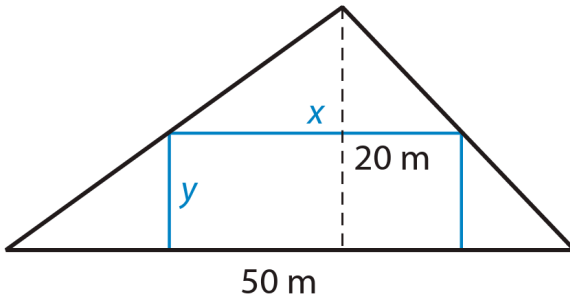
$$x = \frac{a}{2}$$

Pinta-ala on siis suurin, kun arkin korkeus on $\frac{a}{2}$.

Vastaus

$$\frac{a}{2}$$

7.23



Iso kolmio (pelto) ja pieni kolmio (tontin yläpuolelle jäävä pellon osa) ovat yhdenmuotoiset. Pienen kolmion kanta on x ja korkeus $20 - y$. Ison kolmion kanta on 50 m ja korkeus 20 m.

Muodostetaan yhdenmuotoisuuden perusteella verranto ja ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$$\frac{x}{50} = \frac{20 - y}{20}$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

$$y = 20 - 0,4x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tontin pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

Sijoitetaan $y = 20 - 0,4x$.

$$= x(20 - 0,4x)$$

$$= -0,4x^2 + 20x$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$20 - 0,4x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 50$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio A saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 50$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -0,4x^2 + 20x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 50$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskimella

Max(A, 0, 50) tai

fMax(A(x), x, 0, 50)

Laskin antaa kohdaksi $x = 25$.

Laskin antaa tulokseksi

(25, 250) tai $x = 25$.

Tontin pinta-ala on suurin, kun $x = 25$ m. Lasketaan sivun y pituus.

$$y = 20 - 0,4x = 20 - 0,4 \cdot 25 = 10 \text{ (m)}.$$

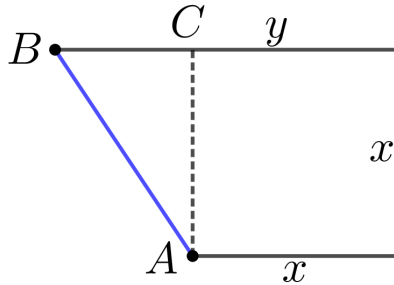
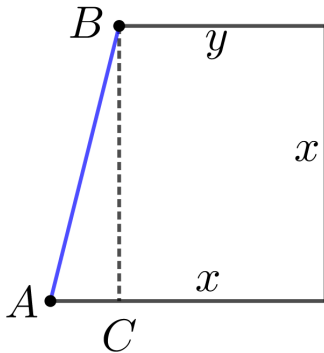
Vastaus

$$x = 25 \text{ m, } y = 10 \text{ m}$$

7.24

Merkitään reitin lähtöpistettä A ja loppupistettä B . Merkitään lisäksi ensimmäiseksi kuljetun matkan pituutta metreinä kirjaimella x ja viimeiseksi kuljetun matkan pituutta kirjaimella y .

Reitti on jommankumman kuvion mukainen.



Koska koko kävelymatkan pituus on 100 m, niin viimeiseksi kuljetun matkan pituus $y = 100 - 2x$.

Lähtöpisteen ja loppupisteen välinen etäisyys AB on hypotenuusa kolmiossa ABC , jossa toisen kateetin pituus on x ja toisen

$$x - y = x - (100 - 2x) = 3x - 100$$

tai

$$y - x = (100 - 2x) - x = 100 - 3x.$$

Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} AB^2 &= x^2 + (3x - 100)^2 & \text{tai} & \quad AB^2 = x^2 + (100 - 3x)^2 \\ &= 10x^2 - 600x + 10\,000 & & \quad = 10x^2 - 600x + 10\,000 \end{aligned}$$

Siis etäisyyden neliö $AB^2 = 10x^2 - 600x + 10\,000$.

Etäisyys AB on pienin silloin kun AB^2 on pienin. Tutkittavaksi funktioksi voidaan valita AB^2 .

$$f(x) = 10x^2 - 600x + 10\,000$$

Kuljettujen matkojen on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion f määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$100 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 50$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $0 \leq x \leq 50$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = 10x^2 - 600x + 10\,000$.

Määritetään laskimen Min-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 50$ kohta, jossa funktion f arvo on suurin.

Laskimella

$\text{Min}(f, 0, 50)$ tai

$\text{fMin}(f(x), x, 0, 50)$

Laskin antaa kohdaksi $x = 30$.

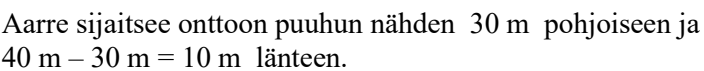
Laskin antaa tulokseksi

$(30, 1000)$ tai $x = 30$.

Etäisyys AB on pienin, kun $x = 30$ m.

Tällöin viimeinen kuljettu matka $y = 100 - 2x = 100 - 2 \cdot 30 \text{ m} = 40 \text{ m}$.

Kuljettu reitti on siis kuvan mukainen.



puusta 30 m pohjoiseen ja 10 m länteen